

Vorlesung 2b

Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen

mit den Beispielen

Anzahl der Erfolge beim n -fachen p -**Münzwurf**

und

Besetzungen beim n -fachen (p_1, \dots, p_g) -**Würfeln**

Teil 1: Grundbegriffe

(Buch S. 20-21)

Abzählbare Additivität von Wahrscheinlichkeiten

Verteilung und Verteilungsgewichte

Zufällige Paare: gemeinsame Verteilung und Projektionen

Weiterverarbeitung von Zufallsvariablen und

Transport von Verteilungen

Bisher hatten wir uns mit Zufallsvariablen beschäftigt, deren Wertebereich S endlich war.

Die (schon in Vorlesung 1b formulierten)

zwei Grundregeln

für Wahrscheinlichkeiten lauteten für diesen Fall:

Normiertheit auf Eins:

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1 .$$

(Folgerung aus der) Additivität:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a), \quad A \subset S$$

Diese beiden Regeln behalten ihren Sinn, wenn der Wertebereich nicht endlich, sondern abzählbar unendlich ist.

Beispiel: $S = \mathbb{N}$

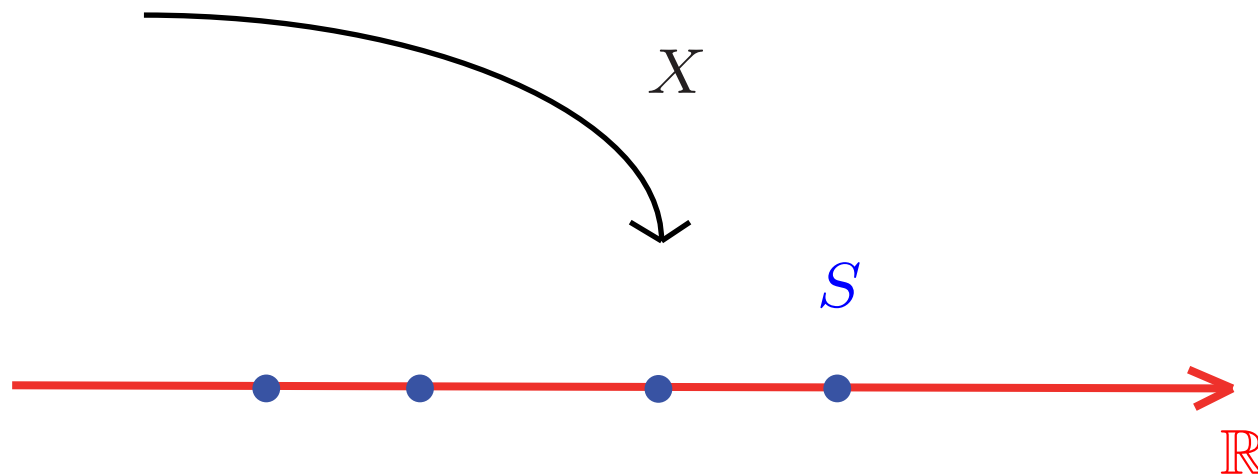
$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{8}, \dots$$

$$\mathbf{P}(X = a) = 1/2^a, \quad a \in \mathbb{N}.$$

Auch wenn der **Wertebereich** von X
eine **überabzählbare Menge** ist
(wie z.B. die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}
oder das “Einheitsintervall” $[0, 1]$
oder das “Einheitsquadrat” $[0, 1] \times [0, 1]$),
behalten beide Regeln ihren Sinn, wenn man fordert,
dass **der Wertebereich**
eine endliche oder abzählbar unendliche Menge S enthält
mit **$P(X \in S) = 1$** .

Eine Zufallsvariable X mit dieser Eigenschaft nennen wir
diskret.

Beispiel: Wertebereich \mathbb{R}



$S \subset \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar unendlich mit $P(X \in S) = 1$

(z.B. $S = \{1, 2, \dots, g\}$, oder $S = \mathbb{N}$)

Warum ist das interessant?

Wie wir sehen werden (und wie jetzt schon intuitiv klar ist),
kann man mit reellwertigen Zufallsvariablen **rechnen**.

Man kann z.B. eine reellwertige Zufallsvariable X
durch 2 teilen,
und wenn die Zufallsvariable X diskret ist,
ist auch die Zufallsvariable $X/2$ diskret.

Nochmal die Definition:

Eine Zufallsvariable X heißt **diskret**,
falls ihr Wertebereich (nennen wir ihn W)
eine **diskrete** (d.h. endliche oder abzählbar unendliche)

Menge S enthält mit

$$P(X \in S) = 1.$$

Für diskretes X mit Wertebereich W
und diskretem S mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a), \quad A \subset S$$

(Wahrscheinlichkeiten sind abzählbar additiv)

$$\mathbf{P}(X \in W \setminus S) = \mathbf{P}(X \in W) - \mathbf{P}(X \in S) = 1 - 1 = 0$$

(X fällt mit Wahrscheinlichkeit 0 außerhalb von S .)

Die Abbildung $A \mapsto \rho(A) := \mathbf{P}(X \in A)$, $A \subset S$,

heißt die **Verteilung** von X .

Die Zahlen $\rho(a) := \mathbf{P}(X = a)$, $a \in S$,

sind die (atomaren) **Gewichte** der Verteilung ρ .

Wir nennen sie auch die **Verteilungsgewichte** von X .

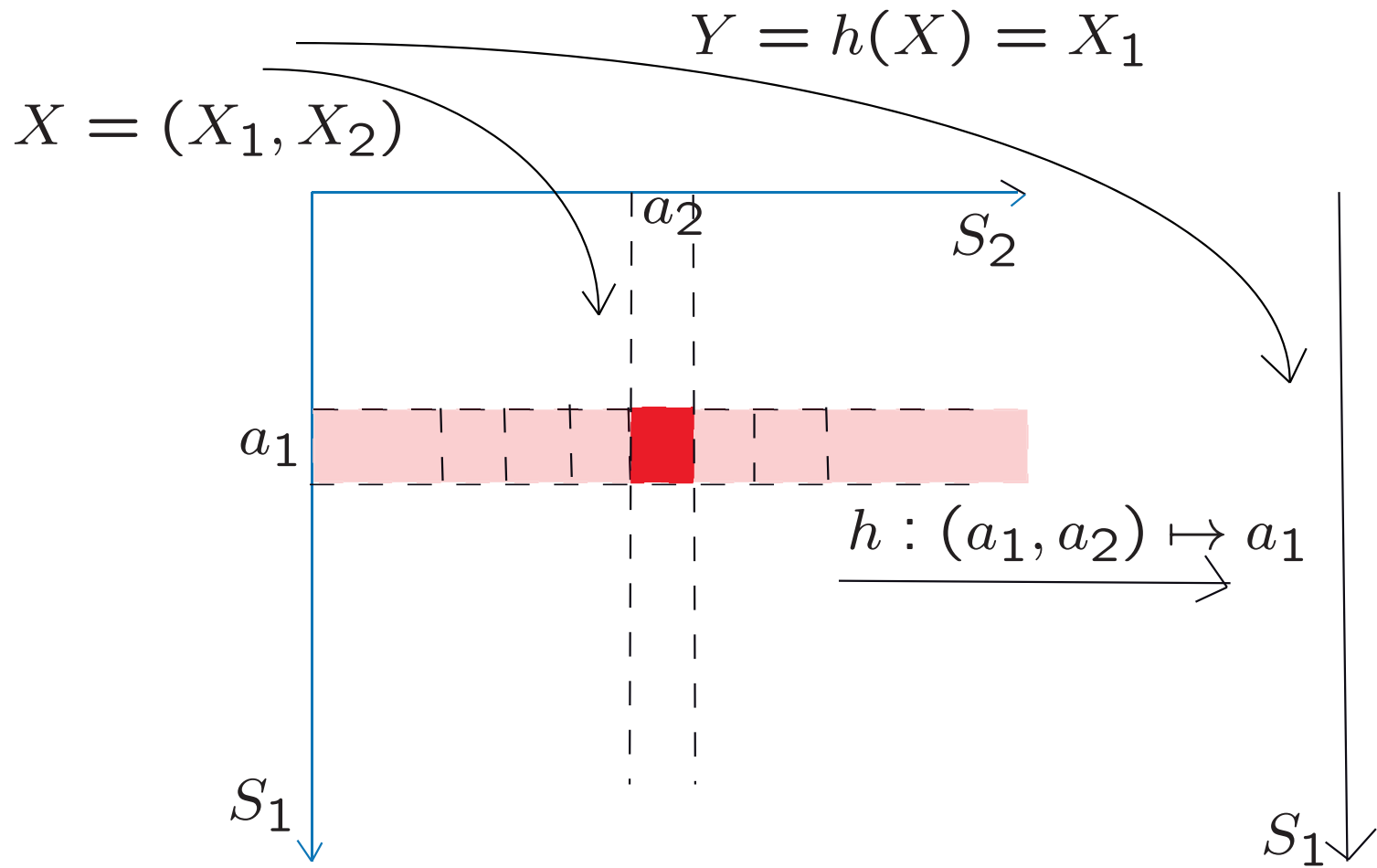
Zufällige Paare und ihre Komponenten

(Buch S. 21)

$X = (X_1, X_2)$ sei eine Zufallsvariable
(ein “zufälliges Paar”) mit diskreten Komponenten X_1, X_2 .

Dann ist auch X diskret, denn die Diskretheit von S_1 und S_2
vererbt sich auf $S_1 \times S_2$, und $\mathbf{P}(X_i \in S_i) = 1, i = 1, 2,$
impliziert $\mathbf{P}(X \in S_1 \times S_2) = 1$.

Die Ereignisse $\{(X_1, X_2) = (a_1, a_2)\}$ notieren wir auch als
 $\{X_1 = a_1, X_2 = a_2\}$.



Die **Verteilungsgewichte von X** (man sagt auch: die gemeinsamen Verteilungsgewichte von X_1 und X_2) schreiben wir als

$$\begin{aligned}\rho(a_1, a_2) &= \mathbf{P}((X_1, X_2) = (a_1, a_2)) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2),\end{aligned}$$

Die **Verteilungsgewichte von X_1** erhält man durch Summation über die a_2 :

$$\rho_1(a_1) = \sum_{a_2 \in S_2} \rho(a_1, a_2).$$

3. Weiterverarbeitung von Zufallsvariablen und Transport von Verteilungen

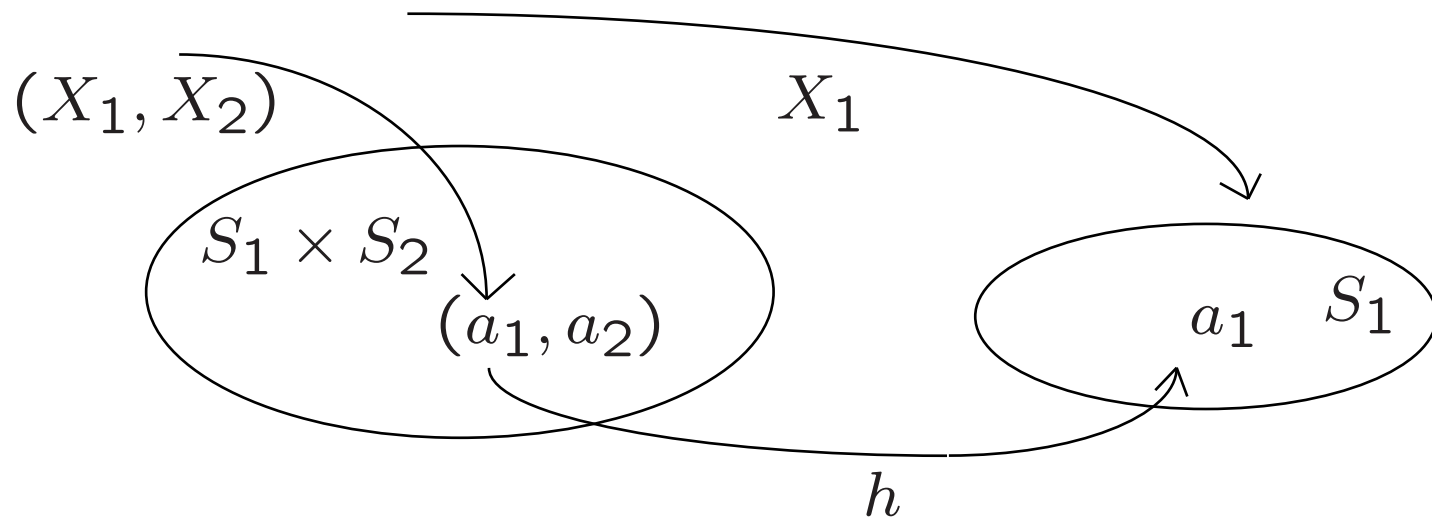
(Buch S. 21-22)

Der Übergang von $X = (X_1, X_2)$
zur Komponente X_1
ist ein Beispiel einer
Weiterverarbeitung einer Zufallsvariablen:

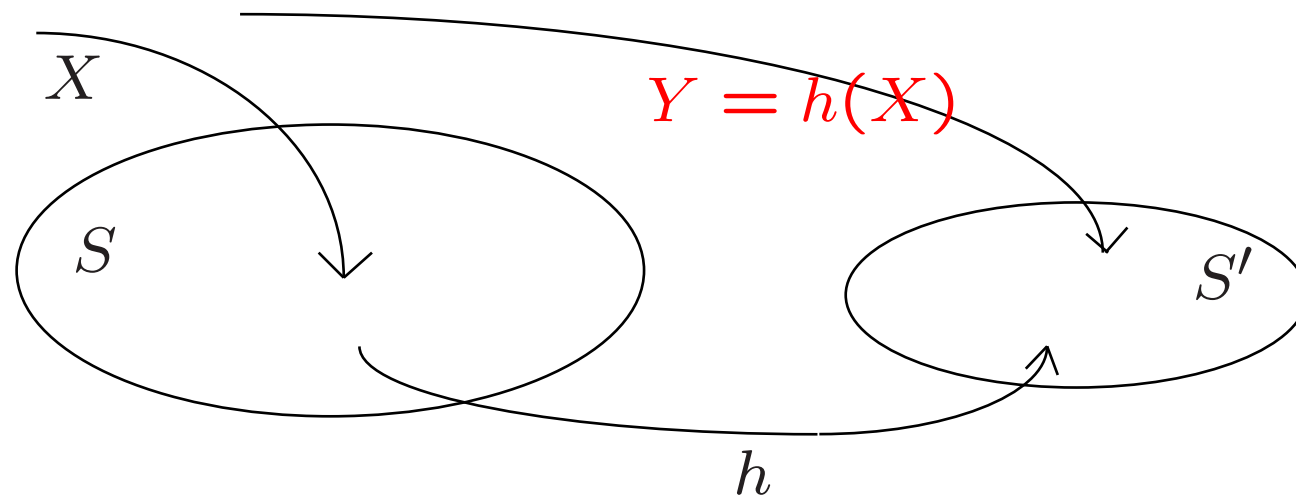
$$X_1 = h(X)$$

mit $h((a_1, a_2)) := a_1$,

also die Projektion des Paares (a_1, a_2)
auf seine erste Komponente.



Sind S und S' zwei Mengen,
 X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S ,
 h eine Abbildung von S nach S' ,
und nimmt man X als zufällige Eingabe von h ,
dann bekommt man eine Zufallsvariable Y mit Zielbereich S' :

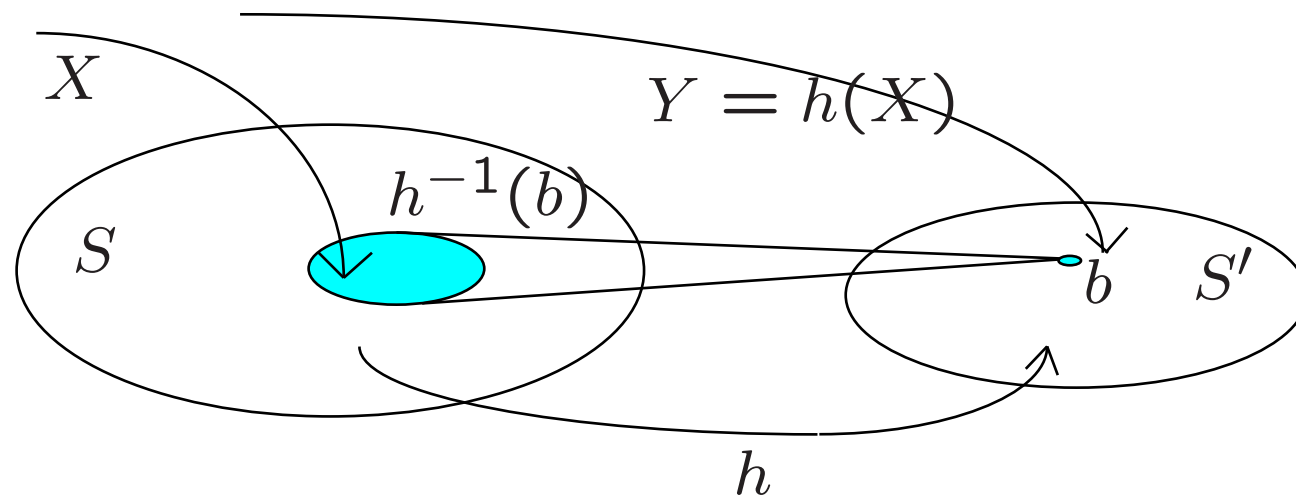


Für jedes $b \in S'$ gilt:

$$\{h(X) = b\} = \{X \in h^{-1}(b)\}.$$

Für die Verteilungsgewichte von $Y = h(X)$ ergibt sich:

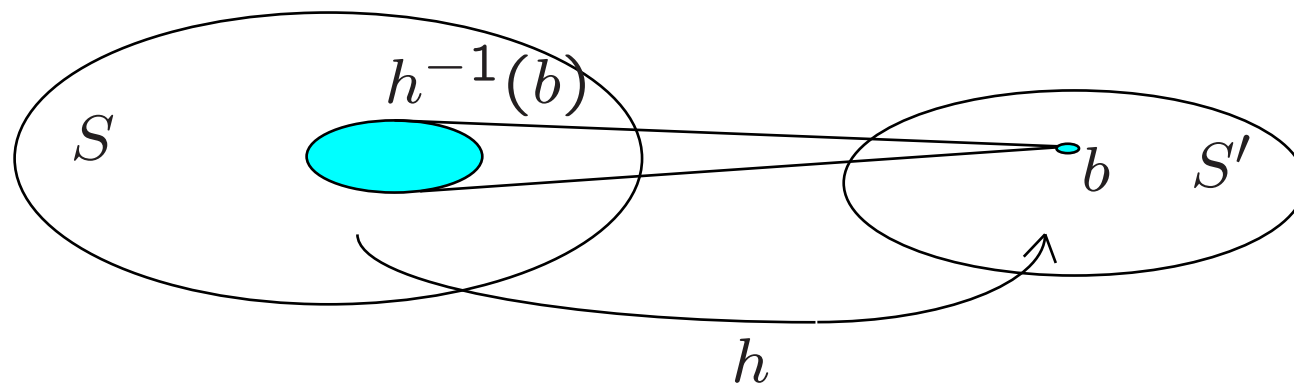
$$\mathbf{P}(Y = b) = \mathbf{P}(X \in h^{-1}(b)) = \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a).$$



Bezeichnet ρ die Verteilung von X und ρ' die von Y ,
dann ist

$$\rho'(b) = \sum_{a \in h^{-1}(b)} \rho(a).$$

Man sagt: Die Verteilung ρ wird durch die Abbildung h
in die Verteilung ρ' transportiert.



Diese Situation haben wir schon mehrmals angetroffen:

in Vorlesung 1b:

$X :=$ rein zufällige $1, \dots, g$ -Folge der Länge $g + 1$

$T = h(X) :=$ Zeitpunkt der ersten Kollision.

in Vorlesung 2a:

$X :=$ rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$

$h(X) :=$ Länge des Zyklus von X , der die Eins enthält.

Heutiges Programm:
Zusätzliche Beispiele für
“Weiterverarbeitungen von zufälligen Folgen”

Daraus bekommen wir wichtige Beispiele
diskreter Zufallsvariablen und diskreter Verteilungen.